Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento
ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

Demonstração da conjectura de Andrica para todos os primos gêmeos

ARTIGO ORIGINAL

SANTOS, Adecio da Silva [1]

SANTOS, Adecio da Silva. **Demonstração da conjectura de Andrica para todos os primos gêmeos**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 04, Ed. 04, Vol. 06, pp. 18-24. Abril de 2019. ISSN: 2448-0959

Contents

- RESUMO
- INTRODUÇÃO
- REFERENCIAL TEÓRICO
- DEMONSTRAÇÃO DA CONJECTURA DE ANDRICA PARA OS PRIMOS GÊMEOS
- CONSIDERAÇÕES FINAIS
- REFERÊNCIAS
- APÊNDICE A

RESUMO

A Conjectura de Andrica é um dos problemas matemáticos até então sem nenhuma solução apresentada. Esta conjectura está relacionada diretamente com a distância entre dois primos consecutivos. E recebeu esse nome em homenagem ao matemático Dorin Andrica. Nosso artigo mostra, pelo método de demonstração por redução ao absurdo, que essa conjectura é verdadeira para todo par de primos gêmeos. Através disto criamos um corolário da Conjectura de Andrica para os primos gêmeos, utilizando para tanto o APÊNDICE A (o qual traz uma demonstração que a quantidade de primos gêmeos é infinita).

Palavras-chave: Andrica, Conjectura, Demostração, Primos Gêmeos.

INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números é uma das áreas da matemática que ainda possuem muitos

problemas em aberto. Um deles é a Conjectura de Andrica, a qual afirma que a desigualdade ?P_{n+1} – ?P_n é verdade ?n ? N, sendo P_n representação do n-ésimo número primo.

Segundo wikipedia: “A conjectura ainda não foi provada nem refutada, apesar de haver fortes indícios de que esta seja verdadeira.” (1)

Utilizando testes em computadores notou se que a conjectura é válida para números muito grandes. A título de curiosidade, o Portal do Geogebra disponibiliza (2), um programa para testar a conjectura para muitos números.

Os trabalhos acadêmicos, em português, sobre o assunto são muito raros. Porém, expomos neste artigo uma prova, utilizando o método de demostração por redução ao absurdo, da veracidade da Conjectura de Andrica é verdadeira para todo par de primos gêmeos. Baseando nos nesta conclusão, criamos e provamos o corolário: Se, ?n ? N (g_n +2,g_n) são pares de primos gêmeos, então $\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}\right)$ = 0 Note que a utilização de limites neste corolário só faz sentido caso a quantidade de primos gêmeos seja infinita. O que também é uma conjectura matemática em aberto. Mas ao final desse artigo deixamos no APÊNDICE A uma prova de tal infinidade.

REFERENCIAL TEÓRICO

Conjectura Matemática é uma afirmação que muitos matemáticos acreditam que seja verdadeira, mas ainda não provaram sua veracidade.

Uma destas conjecturas é a de Andrica. A qual afirma que a desigualdade ?P_{n+1} – ?P_n é verdadeira ?n ? N, sendo P_n a representação do n-ésimo número primo. Entretanto, argumentemos simplificadamente que a afirmação é válida para todos os números primos gêmeos. E analisaremos se é verdade isto. Mas para tanto usaremos os princípios lógicos, conforme Alencar Filho, do Terceiro Excluído e o da Não-Contradição. (3)

A partir daí, provaremos a Conjectura de Andrica para todos os Primos Gêmeos, através de algumas manipulações algébricas. Depois disto criamos o corolário: Se, ?n ? N, (g_n +2,g_n) são pares de primos gêmeos, então $\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}\right)$ = 0. O qual é provado pelo uso do APÊNDICE A (que expõe uma demonstração da infinidade dos primos gêmeos) e por argumentações baseadas nas definições de limites e no Teorema do Sanduíche. Em particular, as definições e ao teorema anteriores mais a propriedade que diz que se uma sequência converge para 0 (zero) e outra sequência é limitada o produto das duas tende a 0 (zero) também são usadas na prova da infinidade dos números primos. Todas essas definições e propriedades de análise real são encontradas na referência (4). Por fim, deixamos ao leitor interessado as referências (5) e (6) que trazem mais informações sobre problemas matemáticos em aberto tais como a Conjectura (forte) de Goldbach, a Conjectura de Legendre, a Conjectura de Collatz, entre outras.

DEMONSTRAÇÃO DA CONJECTURA DE ANDRICA PARA OS PRIMOS GÊMEOS

Nesta seção apresentaremos a conjectura de Andrica, a prova de sua veracidade para todos os primos gêmeos e o corolário criado baseado em nosso resultado.

Conjectura de Andrica: A conjectura afirma que a desigualdade ?P_{n+1} – ?P_n é verdadeira ?n ? N, sendo P_n a representação do n-ésimo número primo.
Deixamos exposto, abaixo, uma prova da que está conjectura é verdadeira para todo par de primo gêmeo.

Demonstração. Provemos que a conjectura é verdadeira para quaisquer pares de primos gêmeos. E para tanto suponhamos, por absurdo, que exista pelo menos um par de primos gêmeos, digamos (g_k +2,g_k) que não satisfaça a conjectura. Ou seja, que ?k ? N tal que ?G_k + 2 – ?G_k ? 1.

Daí, tomando o par de primos gêmeos acima e baseando nos em manipulações algébricas, as quais resultaram nas implicações sucessivas de cima para baixo a seguir, encontraríamos que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{g_k+2}-\sqrt{g_k} &\geq 1 \\
&\Downarrow \\
(\sqrt{g_k+2}-\sqrt{g_k})^2 &\geq 1^2 \\
&\Downarrow \\
g_k+2-2\sqrt{(g_k+2)\cdot(g_k)}+g_k &\geq 1 \\
&\Downarrow \\
g_k+2+g_k &\geq 1+2\sqrt{(g_k+2)\cdot(g_k)} \\
&\Downarrow \\
2g_k+1 &\geq 2\sqrt{(g_k+2)\cdot(g_k)}
\end{aligned}
$$

e elevando ao quadrado ambos os membros, desta última desigualdade, obteremos
as seguintes implicações $(2G_k + 1)^2$? $(^2$?$(g_k+2)\cdot(g_k)^2$ 4g2k + $4g_k^2$ + 1 ? $4g_k$ +$8g_k$? $4g_k$ +1 ? $8g_k$? 1 ? $4g_k$, ou seja, 1/4 ? G_k, mas isto é um ABSURDO!

Logo, a conjectura de Andrica é verdadeira para quaisquer pares de primos gêmeos.

Tomando posse desta ultima conclusão, podemos enunciar O Corolário da Conjectura de Andrica para todos os Primos Gêmeos. Corolário da Conjectura de Andrica (para números primos gêmeos): Se, ?n ? N, (g_n +2,g_n) são pares de primos gêmeos, então $\lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}\right)$ =0.

Demonstração. Pelo APÊNDICE A, sabemos que os pares de primos gêmeos são infinito. E definindo g_n como o n-ésimo número primo gêmeo, temos que ?g_n +2 ??g_{n+1} +2,g_n) são pares de primos gêmeos, ?n ? N. Agora, note que ?g_n +2??g_n $\frac{1}{\sqrt{g_n+2}-\sqrt{g_n}}>1$?n ? N. E isto nos garante que podemos tomar sempre o maior natural, n_i menor do que $\frac{1}{\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}}$ e o menor na natural, m_i, maior do que $\frac{1}{\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}}$, para todo $i=1,2,3,\cdots,n,\cdots$. Ou seja, $n_i<\frac{1}{\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}}<m_i$. Entretanto, isto implica na desigualdade $\frac{1}{m_i}<\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}<\frac{1}{n_i}\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}<\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}\right)<\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}$, fazendo $n\longrightarrow\infty$, obtemos, pelo Teorema do Sanduíche, que $\lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\sqrt{g_i+2}-\sqrt{g_i}\right)=0$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os grandes matemáticos dos séculos passados, tais como Euler (que tem o número irracional "e" em sua homenagem), Hiemann (que conjecturou o mais famoso problema matemático, atualmente, em aberto: A hipótese de Hiemann) , Gaus, Hilbert (que listou os 23 maiores problemas da história da matemática), Cantor (que provou que os números reais são infinitos não enumeráveis) , Gödel (que provou o Teorema da Incompletude), entre outros, nos mostraram a beleza da matemática e de seu raciocínio lógico.
O prazer da descoberta e a honestidade da prova que um resultado, inquestionável, fazem da matemática uma grande conquista da humanidade.
Este artigo explorou, através da Conjectura de Andrica, uma simples gota de um imenso oceano de números, raciocínios e descobertas que a matemática tem a nos oferecer.
No mais esperamos, através deste trabalho, incentivar novos pesquisadores na área em prol de navegarmos juntos no mar do conhecimento.

REFERÊNCIAS

1. Portal do wikipedia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura_de_Andrica. Acesso em 14 de abril de 2019.
2. Portal do geogebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/a3v2hpxc. Acesso em 17 de abril de 2019.
3. ALENCAR FILHO, Edgard de. Iniciação à Lógica Matemática. 18 Ed. São Paulo: Nobel, 1975.
4. LIMA, Elon Lages Análise Real. vol. 1 Coleção Matemática Universitária, SBM,. Rio de Janeiro, 2001.
5. Portal do ifba. Disponível em: http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente /MAT/EJS. Acesso em 14 de abril de 2019.
6. Portal do obaricentrodamente. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2014/01/ conjecturas-de-seba-sobre-distancia_25.html./PROBLEMAS_MATEMATICOS_DO_SECULO_XXI.pdf. Acesso em 14 de abril de 2019.

APÊNDICE A

Conjectura: Existe uma infinidade de números primos gêmeos.

Demonstração. Digamos que pn é a representação do n-ésimo número primo e suponhamos, por absurdo, que a quantidade de números primos gêmeos fosse finita sendo o número p_k o maior primo gêmeo. Então, nossa suposição implica que ?$_i$? 1 / p_k+i > p_k, os números p_k+$_i$ + 2 são todos ímpares compostos. Agora, tomemos d_1, d_2, d_3, ··· , d_i sendo os maiores divisores de p_k+$_1$ +2, p_k+$_2$ +2, p_k+$_3$ +2, ··· , p_k+$_n$ +2 respectivamente. Daí, temos as desigualdades abaixo e somando as, membro a membro, temos que

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{p_{k+1}+2}{d_1} \leq d_1 & \Rightarrow & p_{k+1}+2 \leq d_1^2 \\ \dfrac{p_{k+2}+2}{d_2} \leq d_2 & \Rightarrow & p_{k+2}+2 \leq d_2^2 \\ \dfrac{p_{k+3}+2}{d_3} \leq d_3 & \Rightarrow & p_{k+3}+2 \leq d_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{p_{k+n}+2}{d_n} \leq d_n & \Rightarrow & p_{k+n}+2 \leq d_n^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_{k+i}\right) + 2n \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \quad (I)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \sum_{i=1}^{n} p_{k+i} \Rightarrow 2n \leq \sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right) \quad (II).$$

De (I) temos ainda que $2n$ n Além disto, a propriedade Arquimediana dos R nos garante que para cada soma $\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right)$ existe um natural M_n tal que $\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right) < M_n \quad (III).$

$$2n \leq \sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right) < M_n.$$

Por (II), (III) e pela transitividade obtemos: dividindo este ultimo resultado pelo termo $(n \cdot M_n)$ ficamos com

$$\frac{2n}{n \cdot M_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right)}{n \cdot M_n} < \frac{M_n}{n \cdot M_n},$$

o que implica no seguinte

$\frac{2}{M_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right)}{n \cdot M_n} < \frac{1}{n}$. Então, fazendo $n \longrightarrow \infty$ (o que implica $M_n \longrightarrow \infty$), encontramos

$$0 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right)}{n \cdot M_n} \right) < 0 \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot M_n} \cdot \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right) \right) < 0.$$

Finalmente, pelo Teorema do Sanduíche e por $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot M_n} = 0$, obtemos $\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right)$ sendo limitada. Mas isto é um ABSURDO! Pois $p_{k+n} + 2 \leq d_n^2 \Rightarrow d_n^2 - p_{k+n} \geq 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, o termo geral da série $\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^2 - p_{k+i}\right)$ não converge para 0 (zero). Logo, existem infinitos primos gêmeos.

[II] Graduado e mestre em matemática.

Enviado: Abril, 2019

Aprovado: Maio, 2019